22107222

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – SÉRIES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Jeudi 20 mai 2010 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 8]*

Étant donné que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y^2 = \mathrm{e}^x$ et que $y = 1$ quand $x = 0$, utilisez la méthode d'Euler avec un pas de 0,1 pour trouver une approximation de la valeur de y quand $x = 0{,}4$. Écrivez toutes les valeurs intermédiaires avec la précision maximale possible.

2. *[Note maximale : 11]*

(a) En utilisant une intégration par parties, montrez que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \cos x \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \sin x \,\mathrm{d}x .$$ *[5 points]*

(b) Trouvez la valeur de ces deux intégrales. *[6 points]*

3. *[Note maximale : 9]*

Résolvez l'équation différentielle

$$x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + xy + 4x^2 ,$$

sachant que $y = 2$ quand $x = 1$. Écrivez votre réponse sous la forme $y = f(x)$.

4. *[Note maximale : 17]*

(a) En utilisant la série de Maclaurin de $(1+x)^n$, donnez et simplifiez l'approximation de la série de Maclaurin de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ jusqu'au terme en x^4. *[3 points]*

(b) Utilisez votre résultat pour montrer qu'une approximation de la série pour $\arccos x$ est

$$\arccos x \approx \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 .$$ *[3 points]*

(c) Évaluez $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arccos(x^2) - x^2}{x^6}$. *[5 points]*

(d) Utilisez l'approximation de la série pour $\arccos x$ pour trouver une valeur approchée de

$$\int_0^{0,2} \arccos\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x ,$$

en donnant votre réponse avec 5 chiffres après la virgule. Votre réponse donne-t-elle la valeur correcte avec 5 chiffres après la virgule de cette intégrale ? *[6 points]*

5. *[Note maximale : 15]*

(a) On considère la série de puissances $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\left(\dfrac{x}{2}\right)^k$.

(i) Trouvez le rayon de convergence.

(ii) Trouvez l'intervalle de convergence. *[10 points]*

(b) On considère la série infinie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \times \dfrac{k}{2k^2+1}$.

(i) Montrez que cette série est convergente.

(ii) Montrez que la somme jusqu'à l'infini de cette série est inférieure à 0,25. *[5 points]*